جامعة البعث	**امتحان مقرر نظرية الاحتمالات**	**الاسم :**
كلية العلوم	**لطلاب السنة الثالثة رياضيات**	**المدة : 90 دقيقة**
قسم الرياضيات	**الفصل الدراسي الثاني للعام 2016 – 2017**	**الدرجة : 100**

السؤال الأول (60 درجة):

أ) X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية $0<x<1 \quad ; \quad f(x)=1$ ، والمطلوب :

1) عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y=-\frac{1}{2}\ln X$. 2) عين الدالة التوزيعية لـ Y. 3) احسب $P\left(Y>\frac{1}{2}\right)$.

4) بفرض $Y_1,Y_2,.....,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ عين الدالة المولدة للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ ، ثم استنتج ما هو التوزيع الاحتمالي لـ Z . 5) عين $E(Z)\,,V(Z)$.

6) بفرض أن Y_1,Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان ولكل منهما نفس توزيع Y عندئذٍ:

❶ احسب $E(Y_1\cdot Y_2)\,,\,M_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2)\,,\,COV(3Y_1,3Y_2)\,,\rho(3Y_1,4Y_2+2)$.

❷ عين الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y_1,Y_2. ❸ احسب $P\left(Y_1>\frac{1}{2},Y_2>\frac{1}{2}\right)$.

❹ عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $U=\min\{Y_1,Y_2\}$. ❺ عين الدالة المولدة للعزوم المركزية المشتركة لـ Y_1,Y_2 .

ب) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية: $x\in\mathbb{R}\;;\; f_X(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}$ ، والمطلوب:

❶ ما نوع المتغير X. ❷ عيِّن الدالة التوزيعية لـ X. ❸ احسب $P(X>2)$. ❹ عيِّن الدالة المميزة لـ X.

❺ بفرض أنَّ $X_1,X_2,....,X_n$ عيِّنة عشوائية لـ X، عندئذٍ عيَّن الدالة المميزة لـ $\overline{X}$. ❻ ما هو التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{X}$.

❼ احسب $P(\overline{X}>2)$. ❽ بفرض أنَّ حجم العينة لـ X هو $n=2$، عندئذٍ عيِّن الدالة التوزيعية المشتركة لـ X_1,X_2.

❾ احسب $P(X_1>2\,,X_2>2)$.

السؤال الثاني(40 درجة):

أ) افرض أنَّ: $x>0\,,y>0\;;\;f(x,y)=xe^{-x(y+1)}$ دالة كثافة احتمالية مشتركة لـ $X\,,Y$ عندئذٍ:

❶ عيِّن دوال الكثافة الهامشية لكل من X و Y. ❷ عيِّن دوال الكثافة الشرطية لـ X حيث Y، ولـ Y حيث X .

❸عيِّن كل من التوقع الشرطي والتباين الشرطي والدالة المولدة الشرطية والدالة التوزيعية الشرطية لـ Y حيث X .

ب) بفرض أنّ X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ، والمطلوب:

❶ عيِّن كل من الدالة المولدة والدالة المولدة التراكمية والدالة المولدة للعزوم المركزية لـ X. ❷ عيِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=3X$. ❸ بفرض أنَّ Y متغير عشوائي مستقل عن X، وله نفس التوزيع الاحتمالي بنفس الوسيط λ عندئذٍ احسب $P(X+Y=n)$.

حمص في 2017/07/03 | انتهت الأسئلة | مدرس المقرر: د.هيثم فرح

السؤال الأول:

أ)

1) لدينا X متغير عشوائي منتظم على المجال $[0,1]$ دالة كثافته هي:

$$f_X(x)=1 \;;\; x\in[0,1]$$

ولدينا:

$$Y=-\frac{1}{2}\ln X \;\Rightarrow\; -2Y=\ln X \;\Rightarrow\; \boxed{X=e^{-2Y}} \;\Rightarrow\; \frac{dX}{dY}=-2e^{-2Y} \;\Rightarrow\; \boxed{\left|\frac{dX}{dY}\right|=2e^{-2Y}}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Bigg|_{x=e^{-2y}}=1\left(\frac{1}{2}e^{-2y}\right)\Bigg|_{x=e^{-2y}}=\frac{1}{2}e^{-2y} \;\Rightarrow\; \boxed{f_Y(y)=2e^{-2y} \;\;;\; y>0}$$

واضح أنَّ Y متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=2$.

2) بما أنَّ Y متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=2$ فإن الدالة التوزيعية له هي :

$$F_Y(y)=1-e^{-\lambda y}=1-e^{-2y} \;\;;\; y>0$$

3) حساب $P\left(Y>\frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(Y>\frac{1}{2}\right)=1-P\left(Y\le\frac{1}{2}\right)=1-F_Y\left(\frac{1}{2}\right)=1-\left(1-e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

4) بما أنَّ $Y_1,Y_2,\dots\dots,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ فإنَّ الدالة المولدة للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ هي:

$$M_Z(t)=M_{\sum_{i=1}^{n}Y_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{Y_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_Y(t)=\left[M_Y(t)\right]^n=\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1}\right]^n=\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-n}$$

واضح أنَّ الدالة المولدة للمتغير العشوائي Z هي دالة مولدة لمتغير عشوائي غماوي بالوسيطين $\lambda=n$ و $\alpha=2$.

5) إيجاد $V(Z)\,,E(Z)$:

بما أنَّ المتغير العشوائي Z غماوي بالوسيطين $\lambda=n$ و $\alpha=2$ فإن :

$$E(Z)=\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{n}{2} \qquad , \qquad V(Z)=\frac{\lambda}{\alpha^2}=\frac{n}{(2)^2}=\frac{n}{4}$$

6) بما أنَّ Y_1,Y_2 متغيران عشوائيان **مستقلان** ولكل منهما نفس توزيع Y فإنَّ:

❶ حساب المقادير :

$$E(Y_1.Y_2)=E(Y_1).E(Y_2)=\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$M_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2)=M_{(Y_1)}(t_1).M_{(Y_2)}(t_2)=\left(1-\frac{t_1}{2}\right)^{-1}.\left(1-\frac{t_2}{2}\right)^{-1}=\frac{4}{(2-t_1).(2-t_2)}$$

$$COV(3Y_1,3Y_2)=9COV(Y_1,Y_2)=9(0)=0$$

$$\rho(3Y_1,4Y_2+2)=\rho(Y_1,Y_2)=0$$
$$\rho(3Y_1,4Y_1+2)=\rho(Y_1,Y_1)=1$$

❷ تعيين الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين Y_1,Y_2 :

$$F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)=F_{Y_1}(y_1).F_{Y_2}(y_2)=\left(1-e^{-2y_1}\right).\left(1-e^{-2y_2}\right)\ ;\ y_1>0\ ,y_2>0$$

❸ حساب $P\left(Y_1>\frac{1}{2},Y_2>\frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(Y_1>\frac{1}{2},Y_2>\frac{1}{2}\right)=P\left(Y_1>\frac{1}{2}\right).P\left(Y_2>\frac{1}{2}\right)=\left[1-P\left(Y_1\le\frac{1}{2}\right)\right].\left[1-P\left(Y_2\le\frac{1}{2}\right)\right]=$$
$$=\left[1-F_{Y_1}\left(\frac{1}{2}\right)\right].\left[1-F_{Y_2}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[1-\left(1-e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right].\left[1-\left(1-e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right]=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

❹ عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $U=\min\{Y_1,Y_2\}$:

$$F_U(u)=P(U<u)=1-P(U\ge u)=1-P\left(\min\{Y_1,Y_2\}\ge u\right)=$$
$$=1-P(Y_1\ge u\ ,Y_2\ge u)=1-P(Y_1\ge u)P(Y_2\ge u)=$$
$$=1-\left[1-P(Y_1<u)\right]\left[1-P(Y_2<u)\right]=1-\left[1-F_{Y_1}(u)\right]\left[1-F_{Y_2}(u)\right]=$$
$$=1-\left[1-F_Y(u)\right]\left[1-F_Y(u)\right]=1-\left[1-F_Y(u)\right]^2=1-\left[1-\left(1-e^{-2u}\right)\right]^2$$
$$=1-\left[e^{-2u}\right]^2=1-e^{-4u}\ ;u>0\Rightarrow f_U(u)=\frac{d}{du}F_U(u)=\frac{d}{du}\left[1-e^{-4u}\right]=4e^{-4u}\ ;u>0$$

من الواضح أنَّ U متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=4$.

❺ إنَّ الدالة المولدة للعزوم المركزية المشتركة لـY_1,Y_2 هي:

$$E(Y_2)=E(Y_1)=E(Y)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$$

$$M_c(t_1,t_2)=e^{-t_1EY_1-t_2EY_2}M_{(Y_1,Y_2)}=e^{-\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2}\frac{4}{(2-t_1).(2-t_2)}=\frac{4e^{-\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2}}{(2-t_1).(2-t_2)}$$

ب)

1) التوزيع الاحتمالي لـ X:

من الواضح أنَّ: $-\infty<x<+\infty\ ;\ f_X(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}$ هي دالة كثافة لمتغير عشوائي X من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,b=0$.

2) إنَّ الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,b=0$ تعطى بالعلاقة :

$$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\quad,\ -\infty<x<+\infty$$

3) حساب $P(X>2)$:

أحمد حاتم أبو حاتم

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F_X(2)=1-\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=1-\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$

4) بما أنَّ المتغير العشوائي X من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,b=0$ ، فإنَّ الدالة المميزة له تعطى بالعلاقة:

$$\psi_X(t)=e^{-a|t|}=e^{-2|t|}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

5) بما أنَّ $X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$ عينة عشوائية لـ X والمطلوب تعيين الدالة المميزة لـ $\overline{X}$ ، ثم تعيين التوزيع الاحتمالي $\overline{X}$.

$$\psi_{\overline{X}}(t)=\psi_{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)/n}(t)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\psi_X\left(\frac{t}{n}\right)=\left[\psi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left[e^{-2\left|\frac{t}{n}\right|}\right]^n=$$

$$=\left[e^{-2n\frac{|t|}{n}}\right]=e^{-2|t|}=\psi_X(t)$$

وهذا يعني أنَّ لـ $\overline{X}$ نفس الدالة المميزة لـ X ، ومنه فإنَّ للمتغير العشوائي $\overline{X}$ نفس التوزيع الاحتمالي لـ X ومنه فإنَّ $\overline{X}$ هو متغير عشوائي من النمط كوشي بوسيطين الأول $a=2$ والثاني $b=0$.

6) بما أنَّ لـ $\overline{X}$ نفس الدالة المميزة لـ X ، فإنَّ للمتغير العشوائي $\overline{X}$ نفس التوزيع الاحتمالي لـ X ومنه فإن $\overline{X}$ هو متغير عشوائي من النمط كوشي بوسيطين الأول $a=2$ والثاني $b=0$.

7) حساب $P\left(\overline{X}>2\right)$:

$$P\left(\overline{X}>2\right)=1-P\left(\overline{X}\le 2\right)=1-F_{\overline{X}}(2)=1-\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=1-\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$

8) بفرض حجم العينة $n=2$ ، والمطلوب تعيين الدالة التوزيعية المشتركة لـ X_1,X_2:

بما أنَّ X_1,X_2 عينة عشوائية لـ X فهما مستقلان ولهما نفس التوزيع الاحتمالي لـ X وبنفس الوسطاء وبالتالي فإنَّ:

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1).F_{X_2}(x_2)=$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\ ,x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}$$

9) حساب $P(X_1<2\,,X_2<2)$:

$$P(X_1<2\,,X_2<2)=P(X_1<2).P(X_2<2)=F_{X_1}(2).F_{X_2}(2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

أو يمكن الحل بالشكل:

$$P(X_1<2\,,X_2<2)=F_{(X_1,X_2)}(2,2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

السؤال الثاني:

أ)

❶ تعيين دوال الكثافة الهامشية لكل من X و Y.

$$f_X(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dy=xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}dy=$$

$$=xe^{-x}\left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\right]_0^\infty=xe^{-x}\left[0+\frac{1}{x}\right]=e^{-x}\quad\Rightarrow\quad\boxed{f_X(x)=e^{-x}\quad;\quad x>0}$$

واضح أنَّ المتغير العشوائي X من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=1$.

$$f_Y(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل الأخير نجري التحويل التالي:

$$z=x(y+1)\ \Rightarrow\ x=\frac{z}{(y+1)}\ \Rightarrow\ dx=\frac{dz}{(y+1)}$$

$$x=0\Rightarrow z=0\quad,\quad x=\infty\Rightarrow z=\infty$$

ومنه نجد أنَّ:

$$f_Y(y)=\int_0^\infty\left(\frac{z}{y+1}\right)e^{-z}\frac{dz}{(y+1)}=\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^\infty z\,e^{-z}dz=\frac{\Gamma(2)}{(y+1)^2}=\frac{1}{(y+1)^2}\ \Rightarrow$$

$$\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{(y+1)^2}\quad;\ y>0}$$

❷ تعيين دوال الكثافة الشرطية لـ X حيث Y، ولـ Y حيث X .

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{x\,e^{-x(y+1)}}{\frac{1}{(y+1)^2}}=x(y+1)^2e^{-x(y+1)}\ ;\ x>0$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{x\,e^{-x(y+1)}}{e^{-x}}=xe^{-xy}\ ;\ y>0$$

واضح أنَّ المتغير العشوائي الشرطي Y حيث X هو متغير عشوائي من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=x$.

❸ تعيين كل من التوقع الشرطي والتباين الشرطي والدالة المولدة الشرطية والدالة التوزيعية الشرطية لـ Y حيث X .

بما أنَّ المتغير العشوائي الشرطي Y حيث X هو متغير عشوائي من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=x$ فإنَّ:

$$E(Y/X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{x}\quad,\quad V(Y/X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$M_{Y/X}(t)=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}=\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-1}\quad,\quad F(y/x)=1-e^{-\lambda y}=1-e^{-xy}\ ;\ y>0$$

ب) بفرض أنّ X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ، والمطلوب:

❶ تعيِّن كل من الدالة المولدة والدالة المولدة التراكمية والدالة المولدة للعزوم المركزية لـ X.

بما أنَّ X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ فإنَّ $E(X)=\lambda$ وكما أنَّ:

الدلة المولدة لـه هي:

$$M_X(t)=e^{-\lambda(1-e^t)}$$

الدالة التراكمية له هي:

$$K_X(t)=\ln[M_X(t)]=\ln\left[e^{-\lambda(1-e^t)}\right]=-\lambda(1-e^t)$$

الدالة المولدة للعزوم المركزية:

$$M_{(X-EX)}(t)=e^{-tEX}M_X(t)=e^{-\lambda t}\left[e^{-\lambda(1-e^t)}\right]=e^{-\lambda(1+t-e^t)}$$

❷ عيِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=3X$.

بما أنَّ X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ فإنَّ القانون الاحتمالي له يعطى بالشكل:

$$P_X(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\quad ;\ x=0,1,2,\dots,\infty$$

وبالتالي فإنَّ:

$$P_Z(z)=P\{Z=z\}=P\{3X=z\}=P\left\{X=\frac{z}{3}\right\}=P_X\left(\frac{z}{3}\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\left(\frac{z}{3}\right)}}{\left(\frac{z}{3}\right)!}\quad ;\ z=0,3,6,\dots$$

❸ بفرض أنَّ Y متغير عشوائي مستقل عن X، وله نفس التوزيع الاحتمالي بنفس الوسيط λ عندئذٍ احسب $P(X+Y=n)$.

إنَّ الحدث $\{X+Y=n\}$ يكتب بالشكل:

$$\{X+Y=n\}=\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i,Y=n-i\}$$

وهذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى ، ومتنافية مثنى مثنى فإنَّ:

$$P\{X+Y=n\}=P\left\{\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i,Y=n-i\}\right\}=\sum_{i=0}^{n}P\{X=i,Y=n-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}P\{X=i\}P\{Y=n-i\}=\sum_{i=0}^{n}P_X(i)P_Y(n-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\right]\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{(n-i)}}{(n-i)!}\right]=e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\lambda^i\lambda^{(n-i)}}{i!(n-i)!}\right)=e^{-2\lambda}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)\lambda^i\lambda^{(n-i)}$$

$$P\{X+Y=n\}=e^{-2\lambda}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_i^n\lambda^i\lambda^{(n-i)}=e^{-2\lambda}\frac{1}{n!}(\lambda+\lambda)^n=e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!}\quad ;\ n=0,1,2,..$$

أي أنَّ مجموع متغيرين عشوائيين بواسونيين لهما نفس الوسيط λ هو متغير عشوائي بواسوني جديد وسيطه 2λ أي مجموع الوسيطين .

انتهت الأجوبة

أ.أحمد حاتم أبو حاتم
0947075489